NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota$=1+\frac{Puntos}{10}$.

Duración= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) Considere las rectas:

$$\ell_1 : (x, y, z) = (1, -1, 0) + t(-2, 1, 4) \qquad \ell_2 : \frac{x+4}{4} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-10}{-8}$$

a) **[8 pts.]** Muestre que las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas.

b) **[12 pts.]** Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta ℓ_1 y al punto $P(0, 4, 2)$.

Solución.

a) Note que los vectores directores de ℓ_1 y ℓ_2 son $\vec{u} = (-2, 1, 4)$ y $\vec{v} = (4, -2, -8)$ (2+2 pts.), respectivamente. Luego, como $\vec{v} = -2\vec{u}$ se tiene que ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas (4 pts.).

También se podría justificar probando que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

b) Como el plano buscado contiene a la recta ℓ_1, en particular contiene a dos puntos que pertenecen a ésta, por ejemplo $Q(1, -1, 0)$ y $R(-1, 0, 4)$ (tomando $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente) (3 pts.). Ahora, se tiene que

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & -9 & 0 \end{vmatrix} = -18\vec{i} - 9\vec{k} \qquad \text{(6 pts.)}$$

es un vector normal al plano buscado. Luego, considerando este vector normal y el punto P, tenemos que la ecuación del plano es

$$-18(x-0) + 0(y-4) - 9(z-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + z = 2 \qquad \text{(3 pts.)}$$

$\square$

2) Sean

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \ , \ V = \left\{ \begin{pmatrix} c & 2a-b \\ b-2a & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \ \text{y} \ W = \langle 1-2x^2, x^2-x+1 \rangle$$

a) **[5 pts.]** Determine si U es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

b) **[5 pts.]** Determine una base y la dimensión de V.

c) **[5 pts.]** Determine si $3-2x \in W$.

Solución.

a) U no es subespacio de $\mathbb{R}^2$. Basta notar, por ejemplo, que $-1(0,1) = (0,-1) \notin U$ (5 pts.).

b) Notemos que un elemento arbitrario de V se puede escribir como sigue

$$\begin{pmatrix} c & 2a-b \\ b-2a & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (2a-b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, el conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ genera a V. Claramente, B es l.i., pues sus vectores no son proporcionales. Así concluimos que B es una base de V y luego $\dim V = 2$. (5 pts.)

c) No es difícil ver que $3-2x = 1(1-2x^2) + 2(x^2-x+1)$, luego $3-2x \in W$ (5 pts.).

$\square$

3) Considere los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+z = y,\ y+z+w = 0\}$ y $V = \langle (0, 1, -1, 0), (1, 2, -1, -1), (-1, 0, -1, 1) \rangle$

a) **[10 pts.]** Encuentre una base para U y V.

b) **[10 pts.]** Encuentre una base y la dimensión de $U + V$.

c) **[5 pts.]** ¿$\mathbb{R}^4 = U \oplus V$?. Justifique.

SOLUCIÓN.

a) De las condiciones que definen a U se puede concluir que un elemento arbitrario de U se puede escribir en la forma

$$(-2z - w, -z - w, z, w) = z(-2, -1, 1, 0) + w(-1, -1, 0, 1) \qquad \text{(3 pts.)}$$

Luego, $B_U = \{(-2, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}$ es claramente una base de U (2 pts.).
No es difícil ver que, por ejemplo, que $(1, 2, -1, -1)$ se puede escribir en combinación lineal de los vectores $(0, 1, -1, 0)$ y $(-1, 0, -1, 1)$. De hecho

$$(1, 2, -1, -1) = 2(0, 1, -1, 0) - (-1, 0, -1, 1) \qquad \text{(3 pts.)}$$

Además, es claro que $B_V = \{(0, 1, -1, 0), (-1, 0, -1, 1)\}$ es l.i. Luego B_V es una base de V (2 pts.).

b) Por teorema, sabemos que $U + W = \langle B_U \cup B_V \rangle$ (4 pts.). Ahora, notemos que:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(4 pts.)}$$

Así, se tiene que $B_U \cup B_V = \{(-2, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1), (0, 1, -1, 0)\}$ es una base de $U + V$ y luego $\dim(U + V) = 3$ (2 pts.).

c) De lo anterior tenemos que $\dim(U + V) = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$, luego $U + V \neq \mathbb{R}^4$. Por lo tanto $\mathbb{R}^4$ no es suma directa de U con V (5 pts.).

$\square$